Διαφορικές εξισώσεις με σταθερούς συντελεστές – Χαρακτηριστικό πολυώνυμο:

ΘΕΩΡΗΜΑ 1: Ας είναι $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_s$ διακεκριμένες ρίζες του χαρακτηριστικού πολυωνύμου της (E_0) ομογενούς με αντίστοιχες πολλαπλότητες $m_1, m_2, \dots, m_s$ ($m_1 + m_2 + \dots + m_s = n$ βαθμός πολυωνύμου). Τότε, οι συναρτήσεις:
$y_{ij}(x) = x^j \cdot e^{\lambda_i x}$, $x \in \mathbb{R}$ $(j = 0, 1, \dots, m-1,\ i = 1, 2, \dots, s)$
αποτελούν ένα ΒΣΛ της ομογενούς γραμμικής Δ.Ε (E_0).

ΘΕΩΡΗΜΑ 2: Έστω (E_0): $a_n y^{(n)} + \dots + a_0 y = 0$, $a_i \in \mathbb{R}$ $(i = 0, 1, \dots, n)$

i) Αν y είναι μια λύση της (E_0), τότε οι συναρτήσεις $\operatorname{Re} y(x)$ και $\operatorname{Im} y(x)$ είναι επίσης λύσεις της.

ii) Κάθε λύση με πραγματικές αρχικές τιμές είναι πραγματική.

iii) Αν $\{y_1, \dots, y_n\}$ ένα ΒΣΛ με πραγματικές συναρτήσεις τότε y είναι μια πραγματική λύση $\Leftrightarrow \exists c_1, \dots, c_n \in \mathbb{R} : y = c_1 y_1 + \dots + c_n y_n$

iv) Ας είναι $\lambda_1 = \sigma_1 + i\tau_1, \dots, \lambda_r = \sigma_r + i\tau_r$, $\sigma_i, \tau_i \in \mathbb{R}$, $\tau_i \neq 0$, $i = 1, \dots, r$ μιγαδικές ρίζες του χαρακτηριστικού πολυωνύμου με αντίστοιχες πολλαπλότητες $m_1, \dots, m_s$ και $\lambda_{2r+1}, \dots, \lambda_s$ πραγματικές ρίζες με αντίστοιχες πολλαπλότητες $m_{2r+1}, \dots, m_s$. Τότε οι παρακάτω συναρτήσεις αποτελούν ένα ΒΣΛ της (E_0):
$x^j \cdot e^{\sigma_i x} \cdot \cos \tau_i x$, $x^j e^{\sigma_i x} \sin \tau_i x$, $i = 1, \dots, r$, $j = 0, 1, \dots, m_i - 1$
και $x^j \cdot e^{\lambda_i x}$, $x \in \mathbb{R}$, $j = 0, 1, \dots, m_i - 1$, $i = 2r+1, \dots, s$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

Να επιλυθούν οι παρακάτω ομογενείς διαφορικές εξισώσεις:

i) $y''' - 4y'' + y' + 6y = 0$ ii) $y''' - y'' - y' + y = 0$

iii) $y''' - 3y'' + 4y' - 2y = 0$ iv) $y^{(4)} + 2y'' + y = 0$

ΛΥΣΗ

i) Ως γνωστόν, το χαρ. πολυώνυμο της εξίσωσης θα είναι
$P(\lambda) = \lambda^3 - 4\lambda^2 + \lambda + 6 = 0 \Rightarrow (\lambda+1)\cdot(\lambda-2)(\lambda-3) = 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow \lambda = -1$ ή $\lambda = 2$ ή $\lambda = 3$ (Απλές ρίζες)

Έτσι, από το Θεώρημα 1:
το σύνολο $A=\{e^{-x}, e^{2x}, e^{3x}\}$ αποτελεί ένα ΒΣΛ
της ομογενούς διαφορικής εξίσωσης.
Άρα, η γενική λύση θα είναι:
$y(x) = c_1 \cdot e^{-x} + c_2 \cdot e^{2x} + c_3 \cdot e^{3x}, \forall x \in \mathbb{R}$

ii) Το χ.π. $P(\lambda) = \lambda^3 - \lambda^2 - \lambda + 1 = 0 \Rightarrow (\lambda-1)^2 \cdot (\lambda+1) = 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow \lambda = 1$ (Διπλή) ή $\lambda = -1$ (Απλή)
Έτσι, από Θεώρημα 1, το σύνολο
$B = \{e^x, xe^x, e^{-x}\}$ είναι ΒΣΛ της ομογενούς ΓΔΕ
Άρα, η γενική λύση θα είναι:
$y(x) = c_1 \cdot e^x + c_2 \cdot x \cdot e^x + c_3 \cdot e^{-x}, \forall x \in \mathbb{R}$

iii) Το χ.π. $p(\lambda) = \lambda^3 - 3\lambda^2 + 4\lambda - 2 = 0 \Rightarrow (\lambda-1)\cdot(\lambda^2 - 2\lambda + 2) = 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow \lambda = 1$ ή $\lambda_2 = 1+i$ και $\lambda = 1-i$. Επομένως, από Θεώρημα 2
ένα ΒΣΛ της ομογενούς είναι το:
$\Gamma = \{e^x, e^x \cos x, e^x \sin x\}$.
Άρα, η γενική λύση:
$y(x) = c_1 \cdot e^x + c_2 \cdot e^x \cos x + c_3 \cdot e^x \sin x$

iv) το χ.π. $p(\lambda) = \lambda^4 + 2\lambda^2 + 1 = 0 \Rightarrow (\lambda^2+1)^2 = 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow \lambda = i$ ή $\lambda = -i$ (Διπλές). Επομένως, από Θεώρημα 2
Ένα ΒΣΛ της ομογενούς είναι το
$\Delta = \{\cos x, x\cos x, \sin x, x \cdot \sin x\}$
Άρα, η γενική λύση:
$y(x) = c_1 \cdot \cos x + c_2 \cdot x \cdot \cos x + c_3 \cdot \sin x + c_4 \cdot x \cdot \sin x$.

ΜΕΘΟΔΟΣ ΤΩΝ ΑΓΝΩΣΤΩΝ ΣΤΑΘΕΡΩΝ

$a_n y^{(n)}(x) + \dots + a_0 y(x) = b(x)$, ΕΥΡΕΣΗ ΜΕΡΙΚΗΣ ΛΥΣΗΣ

ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ 1η

Εάν $b(x) = P(x) \neq 0$ τότε θέτουμε στην μικρότερης τάξης παράγωγο ως ένα πολυώνυμο ίδιου βαθμού με το $P(x)$.
(Δηλ. στην αρχική μη ομογενή ΓΔΕ θα θέσουμε για $a_0 \neq 0$ προφανώς $y = b_n x^n + \dots + b_0 \cdot x^0$ εάν $P(x)$ είναι n-βαθμού)

ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ 2η

Εάν $b(x) = e^{\lambda x} \cdot P(x)$, $P(x) \neq 0$, $\lambda \neq 0$ σταθερά
Τότε θα θέσουμε $y(x) = z(x) \cdot e^{\lambda x}$ και στην ουσία την αναγάγουμε σε μια εξίσωση της περίπτωσης 1

ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ 3η

Εάν $b(x) = e^{\sigma x} \cdot P(x) \cdot \cos \tau x$ (ή $\sin \tau x$) , $\sigma, \tau \in \mathbb{R}$, $P(x) \neq 0$
Τότε θεωρούμε $L(\bar{y}) = P(x) \cdot e^{(\sigma + \tau i)x}$, $\tau \neq 0$ όπου οι συναρτήσεις $Re\, y_n$ ή $Im\, y_n$ μερικές λύσεις της μη ομογενούς

ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ 4η

Εάν $b(x) = e^{\sigma x} \cdot P(x) \cdot \cos \tau x$ (ή $\sin \tau x$) , $\sigma, \tau \in \mathbb{R}$, $P(x) \neq 0$; $\tau \neq 0$
Τώρα , εάν $b(x) = b_1(x) + b_2(x)$ όπου αντίστοιχα
$b_1(x) = \frac{1}{2} P(x) \cdot e^{(\sigma + \tau i)x}$ και $b_2(x) = \frac{1}{2} P(x) \cdot e^{(\sigma - \tau i)x}$, $x \in \mathbb{R}$
ή
$b_1(x) = \frac{1}{2i} P(x) \cdot e^{(\sigma + \tau i)x}$ και $b_2(x) = \frac{1}{2i} P(x) \cdot e^{(\sigma - \tau i)x}$, $x \in \mathbb{R}$
Έτσι, αρκεί να βρεθούν οι μερικές λύσεις για κάθε εξίσωση $L(y) = b_1$ και $L(y) = b_2$ (που ανάγεται στην Περίπτωση II)

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ:

1) Να βρεθεί μια μερική λύση για καθεμία από τις παρακάτω Δ.Ε

i) $y^{(4)} + y'' = x^3 + 1$, iv) $y''' - 2y' + y = xe^{-x}\cos 2x$

ii) $y''' + 2y' + y = 2x^2 - x$, v) $y'' - 2y' + y = x \cdot e^{-x}\sin 2x$

iii) $y''' + y'' + 2y = x^2 \cdot e^{-2x}$, vi) $y'' - 4y' + 4y = e^x + \sin x$

ΛΥΣΗ

i) Περίπτωση 1: Θέτω $y''_\mu = \alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x + \delta \Rightarrow y^{(4)}_\mu = 6\alpha x + 2\beta$

Άρα, στην αρχική σχέση, έχουμε:

$6\alpha x + 2\beta + \alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x + \delta = x^3 + 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow \alpha x^3 + \beta x^2 + (6\alpha + \gamma)x + 2\beta + \delta = x^3 + 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow \alpha = 1$ και $\beta = 0$ και $6\alpha + \gamma = 0 \Rightarrow \gamma = -6$ και $\delta = 1$

Συνεπώς, $y''_\mu = x^3 - 6x + 1 \Rightarrow y'_\mu = \frac{x^4}{4} - 3x^2 + x \Rightarrow$

$\Rightarrow y_\mu = \frac{x^5}{5} - x^3 + \frac{x^2}{2}$, $x \in \mathbb{R}$ (τα c_i σταθερές μας περισσεύουν)

ii) Περίπτωση 1: Θέτω $y_\mu = \alpha x^2 + \beta x + \gamma \Rightarrow y'_\mu = 2\alpha x + \beta \Rightarrow y'''_\mu = 0$

Άρα, στην αρχική σχέση, έχουμε:

$2(2\alpha x + \beta) + \alpha x^2 + \beta x + \gamma = 2x^2 - x \Rightarrow$

$\Rightarrow \alpha x^2 + 2(2\alpha + \beta)x + 2\beta + \gamma = 2x^2 - x \Rightarrow$

$\Rightarrow \alpha = 2$ και $2(2\alpha + \beta) = -1$ και $2\beta + \gamma = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \alpha = 2$ και $\beta = -9$ και $\gamma = 18$

Συνεπώς, $y_\mu = 2x^2 - 9x + 18$, $x \in \mathbb{R}$

iii) Περίπτωση 2: Θέτω $y_\mu = z_\mu e^{-2x} \Rightarrow y'_\mu = z' \cdot e^{-2x} + z \cdot e^{-2x}(-2)$

$\Rightarrow y''_\mu = z'' \cdot e^{-2x} + z' \cdot e^{-2x}(-2) + z' \cdot e^{-2x}(-2) + z \cdot e^{-2x}(-2)(-2) =$

$= z'' \cdot e^{-2x} - 2z' \cdot e^{-2x} - 2z' \cdot e^{-2x} + 4 \cdot z \cdot e^{-2x} =$

$= e^{-2x}(z'' - 4z' + 4z).$

$\Rightarrow y'''_\mu = e^{-2x}(-2)(z'' - 4z' + 4z) + e^{-2x} \cdot (z''' - 4z'' + 4z') =$

$= e^{-2x}(z''' - 6z'' + 12z' - 8z).$

Άρα, στην αρχική σχέση παίρνουμε με αντικατάσταση:

$z''' - 5z'' + 8z' - 2z = x^2$ ($\Leftarrow$ 1η περίπτωση)

Θέτω $z_\mu = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$, α, β, γ σταθεροί συντελεστές

$z_\mu' = 2ax + \beta \Rightarrow z''_\mu = 2a \Rightarrow z'''_\mu = 0$

Άρα, θα προκύψει:

$-10a + 16ax + 8\beta - 2ax^2 - 2\beta x - 2\gamma = x^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow -2ax^2 + (16a - 2\beta)x - 10a + 8\beta - 2\gamma = x^2$

$\Rightarrow \begin{cases} -2a = 1 \Rightarrow a = -\frac{1}{2} \text{ και } 16a - 2\beta = 0 \Rightarrow 8(-\frac{1}{2}) - \beta = 0 \Rightarrow \beta = -4 \\ \text{και άρα αφού } -10a + 8\beta - 2\gamma = 0 \text{ τότε } \gamma = -\frac{27}{2} \end{cases}$

Τουτέστιν, $z_\mu = -\frac{1}{2}x^2 - 4x - \frac{27}{2}$, $x \in \mathbb{R}$

και συνεπώς αφού $y_\mu = z_\mu e^{-2x}$

τότε $y_\mu = \left(-\frac{1}{2}x^2 - 4x - \frac{27}{2}\right)e^{-2x}$, $x \in \mathbb{R}$

v-iv) Περίπτωση 3: Θέτουμε $y'' - 2y' + y = x \cdot e^{(-1+2i)x}$

Δηλαδή την αναγάγαμε στην περίπτωση 2.

Επομένως, θέτουμε:

$y_\mu = z_\mu e^{(-1+2i)x} \Rightarrow y_\mu' = z'_\mu \cdot e^{(-1+2i)x} + z_\mu \cdot e^{(-1+2i)x} \cdot (-1+2i)$

$\Rightarrow y_\mu'' = z''_\mu e^{(-1+2i)x} + z'_\mu \cdot e^{(-1+2i)x}(-1+2i) + z_\mu' \cdot e^{(-1+2i)x} \cdot (-1+2i)$
$+ z_\mu \cdot e^{(-1+2i)x} \cdot (-1+2i)^2 =$

$= z''_\mu e^{(-1+2i)x} + 2z'_\mu e^{(-1+2i)x}(-1+2i) + z_\mu \cdot e^{(-1+2i)x} \cdot (-1+2i)^2 =$

$= \left(z''_\mu + 2z'_\mu \cdot (-1+2i) + z_\mu \cdot (-1+2i)\right)e^{(-1+2i)x}$

Άρα, με αντικατάσταση στην αρχική σχέση έχουμε, ότι:

$z'' + 4(-1+i)z' - 8iz = x$ (≠ 1η περίπτωση)

Θέτω $z_\mu = ax + \beta \Rightarrow z_\mu' = a \Rightarrow z''_\mu = 0$

$4(-1+i)a - 8i(ax + \beta) = x \Rightarrow$

$\Rightarrow -4a + 4ai - 8aix - 8\beta = x \Rightarrow$

$\Rightarrow -8aix - 4a + 4ai - 8\beta = x \Rightarrow$

$\Rightarrow -8ai = 1 \Rightarrow a = -\frac{1}{8i} = \frac{1}{8}i$

και $-4a + 4ai - 8\beta = 0 \overset{8i}{\Rightarrow}$

$\Rightarrow -4 \cdot \frac{1}{8}i + 4\frac{1}{8}i^2 - 8\beta = 0 \Rightarrow -\frac{1}{2}i - \frac{1}{2}i - 8\beta = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \beta = \frac{1}{16}(-1+i)$

και συνεπώς, $z_\mu(x) = \frac{1}{8}i + \frac{1}{16}(-1+i)$, $x \in \mathbb{R}$

και αφού $y_\mu = z_\mu \cdot e^{(-1+2i)x} = \left(\frac{1}{8}i + \frac{1}{16}(-1+i)\right)e^{(-1+2i)x} =$

$= \left(-\frac{1}{16} \cdot \frac{1}{8}(x + \frac{1}{2})i\right)e^{-x} \cdot (\cos 2x + i\sin 2x) =$

$$= \underbrace{e^{-x}\left(-\frac{1}{16}\cos 2x - \frac{1}{8}\left(x+\frac{1}{2}\right)\sin 2x\right)}_{\text{μερική λύση της (iv)}} + i\underbrace{e^{-x}\left(-\frac{1}{16}\sin 2x + \frac{1}{8}\left(x+\frac{1}{2}\right)\cos 2x\right)}_{\text{μερική λύση της (v)}}$$

Δηλ. $\mathrm{Re}\, y_\mu$ και $\mathrm{Im}\, y_\mu$ λύσεις της μη ομογενούς

vi) $y'' - 4y' + 4y = e^x + \sin x$ ← Περίπτωση 4.

$y'' - 4y' + 4y = e^x$ (περ. 2η) και $y'' - 4y' + 4y = \sin x$ (περ. 3η)

όμοια παίρνουμε τη μερική λύση:
$y_\mu^{1}(x) = e^x,\ x \in \mathbb{R}$

όμοια παίρνουμε τη μερική λύση:
$y_\mu^{2}(x) = \frac{1}{25}(4\cos x + 3\sin x)$

Συνεπώς, $y_\mu(x) = y_\mu^{[1]}(x) + y_\mu^{[2]}(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$.